De cosinusregel

Kernidee Ontwikkel zelf het bewijs volgens Euclides.

Opdracht Pythagoras (6e eeuw v.C.) deed zelf al de eerste pogingen om zijn stelling uit te breiden naar niet-rechthoekige driehoeken.

Hippokrates van Chios (5e eeuw v.C.) bewees dat het vierkant, dat tegenover een spitse hoek van een driehoek ligt, kleiner is dan de som van de twee andere vierkanten.

Euclides (3e eeuw v.C., Griekenland) gaf een bewijs van de cosinusregel. Door de volgende stappen te volgen ga je hem achterna:

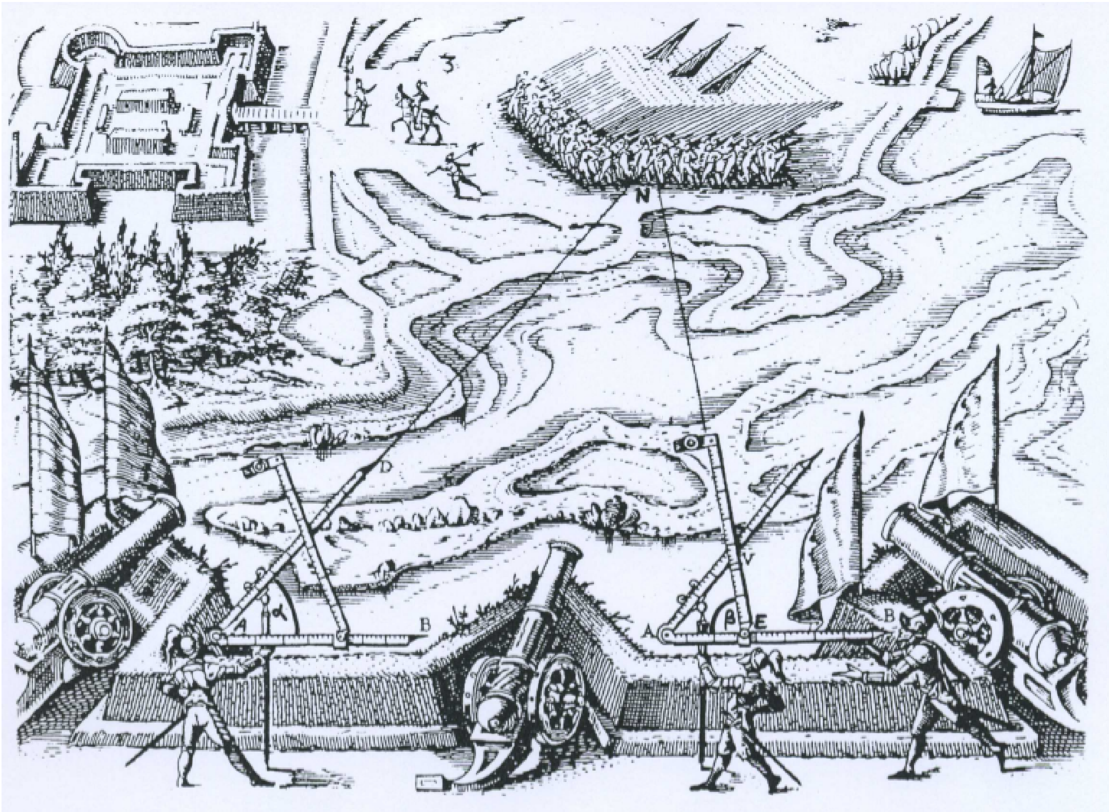
1. Teken een driehoek ABC. Gebruik dezelfde naamgevingsconventies als bij de sinusregel. (Het hiernavolgende is makkelijker als de driehoek geen stompe hoek heeft, maar dat hoeft niet.)
2. Teken op elke zijde een vierkant. Wat zijn de oppervlaktes van deze vierkanten?

   Deze figuur zou je bekend voor moeten komen: het lijkt op een illustratie van de stelling van Pythagoras, alleen is er hier geen rechte hoek.

   Geldt $a^2 + b^2 < c^2$ of $a^2 + b^2 > c^2$? Beredeneer op basis van de tekening; ga daarna pas na door te meten.
3. Teken de hoogtelijnen van de driehoek. Trek deze door door de vierkanten heen. Elk vierkant is nu in twee rechthoeken verdeeld.
4. Kies 1 van de rechthoeken en bewijs dat deze dezelfde oppervlakte heeft als de rechthoek die 'om het hoekje' ligt: bijvoorbeeld de twee rechthoeken die aan hoek α grenzen. Euclides deed dit uiteraard meetkundig, want algebra bestond toen nog niet. Hij maakte gebruik van twee parallelle verschuivingen en een rotatie.
5. Beredeneer dat dan de andere rechthoeken ook twee aan twee even groot zijn.
6. Bereken de oppervlakte van de twee rechthoeken die grenzen aan γ in functie van a, b en γ. (Je kan als hulpgrootte de hoogte van zo'n rechthoek h invoeren en deze dan bepalen met behulp van de rechthoekige driehoek waarin γ ligt.)
7. Hoe moet je nu de stelling van Pythagoras aanpassen zodat het weer klopt in deze driehoek? Bedenk dat c^2 uit twee rechthoeken bestaat.
8. Formuleer de cosinusregel! Wat heb je hieraan? Wanneer kan je deze toepassen? Kan je een toepassing bedenken?

Het is niet erg als je niet tot het einde geraakt. Integendeel, dat is niet de verwachting. Ga zo ver als je geraakt en schrijf daar een verslag van. Vermeld dus vooral duidelijk waar je vastloopt en waarom, en wat je geprobeerd hebt.

Oefeningen op de sinusregel



Opgave 1. De verdedigers meten:

a) $\alpha = 84°$, $\beta = 88°$

b) $\alpha = 87°$, $\beta = 89°$

De twee waarnemers staan op 16 m van elkaar. Hoe ver zijn de vijandelijke troepen (N)?

Opgave 2. Vanuit het aanvallende leger wordt geschat, dat de twee meetposten 20 m van elkaar staan. De hoek bij N wordt gemeten:

a) $\gamma = 3{,}2°$

b) $\gamma = 4°$

Er wordt aangenomen dat de driehoek ANE ten opzichte van de basis AE gelijkbenig is. Op welke afstand ($\overline{AN} = \overline{EN}$) zijn de troepen van de vesting?

Oplossingen

Oefeningen op de sinusregel

1. Gemeten vanaf E:
   a) 114,33 m
   b) 229,06 m
2. a) 358,15 m

   b) 286,54 m