Wonderlijke samenhangen tussen logaritme, wortel en macht

Hendrik Maryns

Aanschouw en bewonder (elimineer blauw):

$$
\begin{aligned}
\log_2 64 &= 6 & \log_2 8 &= 3 \\
\sqrt[6]{64} &= 2 & 2^3 &= 8 \\
\log_2 32 &= 5 & \log_3 81 &= 4 \\
\sqrt[5]{32} &= 2 & 3^4 &= 81 \\
\log_3 729 &= 6 & \log_{10} 100 &= 2 \\
\sqrt[6]{729} &= 3 & 10^2 &= 100 \\
&\vdots & &\vdots \\
\sqrt[\log_c a]{a} &= c & a^{\log_a c} &= c
\end{aligned}
$$

De rechtse is eigenlijk gewoon de definitie van de logaritme, de linkse is daar een mooi gevolg van.

Bovenstaande leent zich mooi als opwarmertje 's ochtends de dag na de introductie van de logaritme, door dit als oefeningenrijtje op bord te zetten en het daarna te bespreken. Aan de hand hiervan en enkele vergelijkbare rijtjes kunnen dan de logaritmeregels ontdekt worden.

Misschien maakt dit de linker begrijpelijker: $\sqrt[\log_c a]{a} = x$ als $x^{\log_c a} = a$ uit de definitie van hogeremachtswortels en dus is $x = a$, want $c^{\log_c a} = a$.

Verder nog enkele manieren om wat ik noem 'de regel om alle andere regels te binden' aan te tonen.

Door de twee bovenstaande te combineren, samen met gebroken machten:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[\log_c a]{a} &= c \\
\left(\sqrt[\log_c a]{a}\right)^{\log_c b} &= b \\
b &= a^{\log_a b} \\
\left(\sqrt[\log_c a]{a}\right)^{\log_c b} &= a^{\log_a b} \\
\left(\sqrt[\log_c a]{a}\right)^{\log_c b} &= a^{\frac{\log_c b}{\log_c a}} \\
\frac{\log_c b}{\log_c a} &= \log_a b
\end{aligned}
$$

Voor deze moet je wel eerst de regel $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ hebben:

$$
\begin{aligned}
a^{\log_a b} &= b \\
\log_c a^{\log_a b} &= \log_c b \\
\log_a b \cdot \log_c a &= \log_c b \\
\log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a}
\end{aligned}
$$

En ten slotte, geleend uit 'Mathematikthemen für die 10. Klasse':

$$
\begin{aligned}
x &= \log_a b \\
a^x &= b \\
\log_c a^x &= \log_c b \\
\log_c a^x &= x \cdot \log_c a \\
x &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \\
\log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a}
\end{aligned}
$$

Veel plezier ermee!