

Toelichting en lesplanning bij groepswerk gelijkvormigheid voor klas 9B (havogroep)

Deze week gaan we groepswerk over gelijkvormigheid. De groepsindeling is als volgt:

Boudewijn	Kjell	Pepijn	Synne	Tom
Thijs	Mees	David	Shivani	Nine
Sanne	Myrthe	Femke	Guus	Kim

Kies zelf een *voorzitter*, een *schrijver* en een *klokkenkijker*. De voorzitter houdt in de gaten dat iedereen het nog kan volgen. De schrijver zorgt voor de uitwerkingen en de klokkenkijker houdt de tijd in de gaten.

Maandag 25 februari

- Groepsopdracht 1 maken (ong. 25 min.)
- Groepsopdracht 2 maken (resterende tijd)
- Opdracht 1 inleveren.

Huiswerk voor vrijdag 1 maart: opdrachten 1 en 2 helemaal af.

Vrijdag 1 maart

- Groepsopdracht 3 maken (ong. 20 min.)
- Groepsopdracht 3 bespreken (ong. 10 min.)
- Groepsopdracht 4 maken (resterende tijd)
- Opdracht 2 en 3 inleveren

Huiswerk voor maandag 4 maart: opdracht 4 maken.

Maandag 4 maart

- Andere helft van de klas bijpraten
- Experiment bij opgave 3 uitvoeren (ong. 30 min.)
- Opdracht 4 afwerken en inleveren.

Voor het experiment doen ook de andere leerlingen van de klas mee. Het is de taak van degenen die de opdrachten gemaakt hebben om ervoor te zorgen, dat de anderen ook begrijpen wat ze aan het doen zijn.

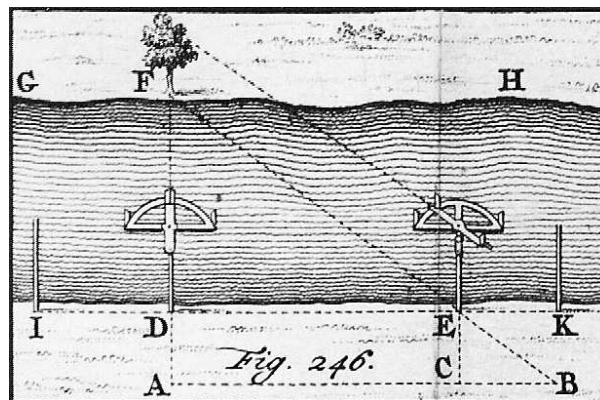
Boudewijn	Kjell	Pepijn	Synne	Tom
Thijs	Mees	David	Shivani	Nine
Sanne	Myrthe	Femke	Guus	Kim
Cathelijne	Ilsa	Koen	Maren	Mees
Eva	Lucas	Ilsa	Mark	Quintes
Tobias				Valentijn

Groepsopdrachten voor klas 9: gelijkvormigheid

Opgave 1 – Het bepalen van de breedte van een gracht of rivier

Dit probleem komt uit een wiskundeboek speciaal voor ingenieurs en landmeters. Het boek is in 1744 verschenen en was de 2e druk van de *Werkdadige Meetkunst* van Johannes Morgenster. Morgenster had dit boek speciaal voor zijn leerlingen laten drukken. De eerste druk dateert van 1703.

Voor het berekenen van de breedte van een gracht of een rivier maakt Morgenster gebruik van gelijkvormige driehoeken. Zo kan de landmeter namelijk gewoon aan de wal blijven en hoeft hij niet het water op. Na het benodigde veldwerk verkrijgt hij onderstaande schets:



1. Neem de figuur over in je werkschrift. Zet de belangrijke letters erbij.
2. Beschrijf welk veldwerk de landmeter heeft moeten doen om de figuur te krijgen. Hoe is hij aan de punten gekomen?

De landmeter meet vervolgens de volgende maten op: $DE = 20$, $BC = 5$ en $CE = 8$, waarbij de afstanden zijn gegeven in roeden (10 voeten).

Om de breedte van de gracht of rivier te berekenen maakt de landmeter gebruik van het feit dat de verkregen driehoek CBE gelijkvormig is met driehoek DEF.

3. Bereken de breedte van de gracht of rivier met behulp van een tabel en de bijbehorende factor.
4. Je had ook gebruik kunnen maken van twee andere gelijkvormige driehoeken. Welke driehoeken zijn dat?
5. (wiskunde B, extra) Punt D staat loodrecht tegenover de boom. Is dit noodzakelijk? Zo nee, welke punten moeten dan ook veranderen?

Opgave 2 – De schaduw van de zon als hulpmiddel

Een andere oude bekende methode om de hoogte van een toren te berekenen is met behulp van de schaduw van de zon. Waar Morgenster bij het vorige voorbeeld een mooi plaatje gaf, geeft hij nu alleen maar een stukje tekst:

Veldwerk.

Steekt een Stok lootlinig in de Aarde, en meet de lengte van de schaduwe die deze Stok maakt, mede de lengte van de Stok voor zo veel zy boven de Aarde is; voorts meet ook de lengte van de Torens schaduwe;

In de 17e eeuw was het Nederlandse schrift nog niet zoals wij het nu kennen, dus je zult misschien eerst een beetje moeten wennen aan het oude Nederlands. De taal is nog wel te herkennen als Nederlands, maar de spelling, grammatica en woordkeus zijn anders dan tegenwoordig. (Spelling is men pas in de 19e eeuw gaan vastleggen, daarvoor schreef iedereen zoals het hem paste. Heerlijk tog?)

Hier zijn een paar algemene regels die je kunnen helpen bij het maken van een vertaling:

- zelfstandige naamwoorden worden met een hoofdletter geschreven
- de letter 's' lijkt op een 'f'
- soms wordt een 't' gespeld waar we nu een 'd' schrijven
- in plaats van 'ch' wordt een 'g' geschreven
- de zinnen zijn langer (veel komma's, puntkomma's en dubbele punten)
- men gebruikt de tweede naamval (des = van de)

1. Lees het bovenstaande 'veldwerk' van Morgenster door en noteer alle woorden die je niet kent. Probeer in tweetallen achter de betekenis van de woorden te komen die jullie hebben opgeschreven. Hulpmiddelen:
 - Op welke moderne Nederlandse woorden lijken ze?
 - Probeer uit het zinsverband op te maken wat de woorden ongeveer kunnen betekenen.

Vereenvoudig de tekst door kortere zinnen te maken: Wat hoort bij elkaar? Je mag strepen zetten in de tekst. Maak in tweetallen een modern Nederlandse vertaling van de tekst. Aanwijzingen: mede = ook en voorts = verder, vervolgens.

2. Maak nu zelf een schets bij dit veldwerk. Teken de toren met schaduw en de stok met schaduw. Zet letters bij belangrijke punten.

Vervolgens geeft Morgenster een regel hoe je nu de hoogte van de toren kunt bepalen:

R E G E L.

*Gelyk de lengte van de schaduwe des Stoks,
Tot't geene de Stok boven de Aarde is;
Alzo de lengte van de Torens schaduwe,
Tot de hoogte des Torens.*

3. In bovenstaande 'regel' wordt een vergelijking gebruikt: 'Gelyk ... also'. De tekst bestaat uit twee gedeelten. Aan welk leesteken kun je dit zien? Je weet nu dat het eerste tekstgedeelte met het tweede wordt vergeleken: 'zoals ..., zo ...' Geef een vertaling van de tekst. Je moet de zinsopbouw (grammatica) wel wat aanpassen om de zinnen te laten kloppen.
4. Welke driehoeken zijn gelijkvormig? Je mag verwijzen naar je tekening bij 2.
5. Geef de regel weer in een tabel, waarbij je de overeenkomstige lengtes onder elkaar zet.

Om te oefenen met de regel geeft Morgenster een getallenvoorbeeld:

*Men neme tot een Exempel een Stok die Loo-
 linig 6 Voeten boven de Aarde staat, zyn schadu-
 we 8 en de Torens schaduwe 120 Voeten.*

In de 17e eeuw rekenden de landmeters nog niet in centimeters en meters, maar in voeten. Deze 'voet' was een standaardmaat.

6. Hoe lang is een voet ongeveer in centimeters denk je?
7. Wat betekent: 'Men neme tot een exempel'? Zet de genoemde getallen in de tabel die je bij 5. gemaakt hebt.

De hoogte wordt vervolgens bepaald op 90 voeten:

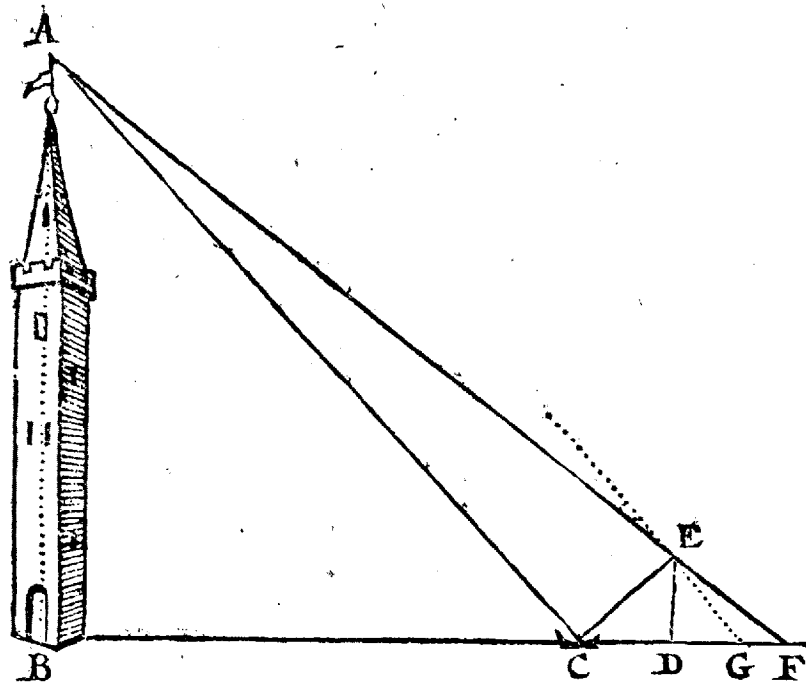
*'t Werk.
 Zegt 8 geeft 6 wat 120? komt 90 Voeten voor
 de begeerde hoogte des Torens.*

8. Laat aan de hand van een berekening zien hoe Morgenster aan zijn antwoord komt.

Opgave 3 – Een spiegel als hulpmiddel

In deze opgave zul je zien dat je de hoogte van een toren ook met behulp van een spiegel kunt bepalen. Dit werd onder andere gedaan door de Amsterdamse rekenmeester Sybrandt Hansz. van Harlinghen, beter bekend als Cardinael. Hij had rond 1612 een boekje geschreven, *Hondert geometrische questien en hare solutien*, dat diende als praktische oefenstof naast de les. Het boekje bestaat uit allerlei problemen over figuren waarvan de afmetingen van een aantal lijnstukken gegeven zijn terwijl de afmetingen van een aantal andere lijnstukken bepaald moeten worden. Zo ook bij dit probleem.

Het onderstaande plaatje gebruikte Cardinael bij zijn berekening. De spiegel ligt in punt C.



Cardinael maakt bij zijn berekening gebruik van een wet uit de natuurkunde die zegt dat de hoek van inval gelijk is aan de hoek van terugkaatsing, in dit geval dus hoek $BCA =$ hoek DCE .

1. Neem de tekening met de punten A t.e.m. E over in je werkschrift.

Het probleem is gemakkelijk als volgt op te lossen: Ga daar staan waar je de top van de toren in de spiegel ziet, in D dus. Meet je ooghoogte (DE) en de afstand van de spiegel tot jou (CD) en van de spiegel tot de toren (BC).

2. Welke hoeken zijn nog meer aan elkaar gelijk?
3. Met behulp van welke gelijkvormige driehoeken kun je de hoogte van de toren berekenen?

Stel $DE = 6$, $CD = 8$ en $BC = 136$, waarbij de afstanden zijn gegeven in voeten.

4. Bereken de hoogte van de toren.

Extra

Je ziet in de tekening van Cardinael nog meer punten en lijnen getekend, zoals F en G, die je bij je oplossing niet gebruikt hebt. Het probleem was namelijk dat de afstand BC door de landmeter vaak niet opgemeten kon worden, bijvoorbeeld doordat er water of struiken tussen zaten. Toch is ook nu het probleem op te lossen met behulp van de spiegel.

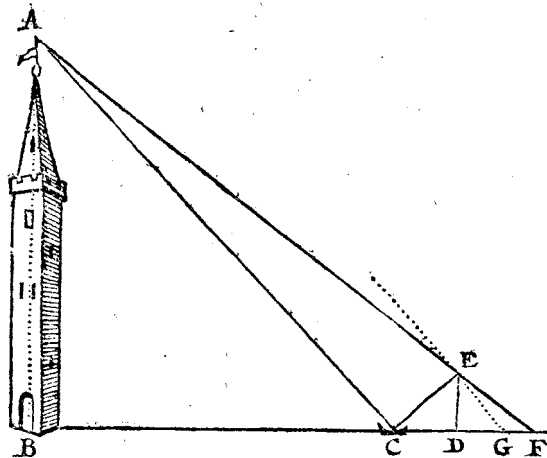
De oplossing wordt dan een stuk lastiger en wij gaan daar in dit lesmateriaal niet verder op in. Als je je nog wel wat verder in dit probleem wilt verdiepen, kun je om extra informatie vragen. Je kunt dan het probleem in oud Nederlands bekijken en proberen te begrijpen. Merk wel op dat hier het zogenaamde Germaanse lettertype gebruikt wordt!

Besiet de naervolghende figure.

Hebbende gelept op een secker plaats (als by exempel in desen int C) een spiegel / om daer door de hooghte van de toorn A B te meten / soo ben ick inde rechte linie C B recht achterwaerts ghegaen van de spiegel C, tot in D 8 voeten / alsoo dat ick ober een stock D E in de spiegel ghesien hebbe het top des toorns A, ende sonder de stock te verrören / ben ick noch achterwaerts ghegaen 9 voeten tot in F, alsoo dat ick in F met mijn ghesichte ober de stock E D top des torens A ghesien hebbe. De vraaghe is dan / sod de stock E D lanck is 6 voeten / hoe veel voeten sulcken toorn hoogh is ?

Om de hooghte van desen toorn te vinden / soo treck ick C D 8 van D F 9 / rest 1 vooz G F. Nu spreect G F 1 / gheven my E D 6 voeten / wat sal my gheven C F 17 ? ende sal komen 102 voeten vooz de hooghte des toorns

A B. De reden van sulcken werck is : om dat den triangel C D E, van een proportie is als A B C, ende de trian-



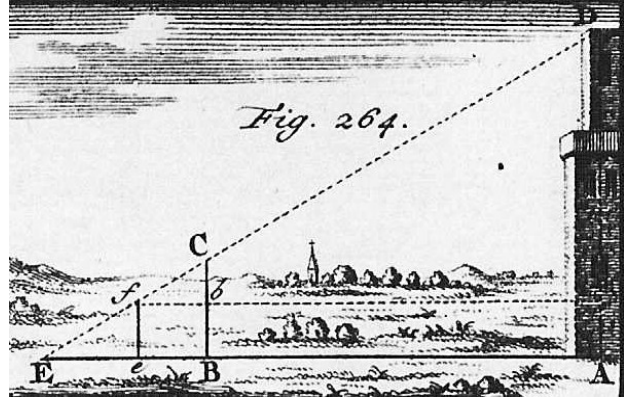
gel E D F van een proportie als A B F, daerom als wy nu E D G ghelijck maecten C D E, soo is E G F noch van een proportie als A C F, om dat E G parallelle is niet A C, alsoo dat dan ghelijck G F staet teghen E D, alsoo staet oock C F teghen A B, de toorns hooghte.

Opgave 4 – De hoogte van een toren bepalen met behulp van een stok

Dit probleem komt weer uit het boek van Morgenster.

Veldwerk.

Om de hoogte van de Toren AD. zonder Hoek meting te vinden; zo steekt een Stok CB Loo-
recht ergens, daar gy de Toren genaken en wel
zien kont, in de aarde, en zie waar de zichtstraal
DC. op de grond in E. komt, dat is, zoekt een
plaats E. daar men over 't einde van de Stok de
top des Torens zien kan; waar dit komt steekt
een pen: dan meet BE., AE. en ook de hoogte
van de Stok BC.; dit aangetekent hebbende, is
't Veldwerk afgeveerdigt.



1. Lees het bovenstaande 'veldwerk' van Morgenster door en maak in tweetallen een modern Nederlandse vertaling van de tekst.
2. Wat is er praktisch ongemakkelijk aan het 'veldwerk'?
3. Bekijk de figuur die Morgenster gebruikt en maak hiervan een schets in je werkschrift. Geef de letters bij de hoekpunten van de driehoeken duidelijk weer.
4. Waarom zijn de driehoeken AED en BEC gelijkvormig?

Nadat het veldwerk is uitgevoerd worden de benodigde maten opgemeten:

Wynemen BE. 9, de Stok BC. 6 ende Grond-
strep AE. 150 Voeten,

5. Vul de bekende afmetingen in een tabel in, waarbij je de overeenkomstige zijden onder elkaar zet.

Nu kan de hoogte van de toren worden bepaald. Morgenster beschrijft dit in het kort als volgt:

't Werk.

BE.	BC.	AE.
9 - - - - -	6 - - - - -	150?

komt AD. de
hoogte des Torens 100 Voeten, als de grond-
strep AE. Waterpas is.

6. Laat aan de hand van een berekening zien hoe Morgenster aan zijn antwoord komt. Bepaal eerst de factor en bereken vervolgens de hoogte van de toren.