Oefening 1

Teken in 1 assenstelsel de grafieken van $y = 2^x$ en van $y = \log_2(x)$. (Vergeet de negatieve getallen en breuken kleiner dan 1 niet!)

Wat valt hieraan te ontdekken? Wat valt op? Formuleer wetmatigheden.

Teken ook de lijn $y = x$ en kijk hoe de grafieken ten opzichte van die lijn liggen.

Oefening 2 Waaiers van functies

1. Teken in één assenstelsel de grafieken van $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, 1^x, $\left(\frac{3}{2}\right)^x$, 2^x, 3^x. Gebruik voor elke lijn een andere kleur.
2. Teken ook de bijbehorende logaritmefuncties: $\log_{\frac{1}{3}}(x)$, $\log_{\frac{1}{2}}(x)$, $\log_1(x)$, $\log_{\frac{3}{2}}(x)$, $\log_2(x)$, $\log_3(x)$. Gebruik de passende kleuren.
3. Probeer zo veel mogelijk eigenschappen van de exponentiële en logaritmische functies te formuleren. Bijvoorbeeld: wordt een logaritmefunctie ooit oneindig groot? Gaat de exponentiële functie oneindig ver door naar rechts? Welke bereiken en domeinen hebben ze? Hebben ze asymptoten? Hoe en hoe snel benaderen ze deze? Hoe hangen de gelijkgekleurde met elkaar samen?
4. Alle exponentiële functies gaan door het punt $(0, 1)$. De raaklijnen in dat punt hebben allemaal een andere hoek met de y-as. Bij welk grondgetal hoort een hoek van 45°? Probeer dat getal zo goed mogelijk te schatten. Het heeft in de wiskunde de naam e gekregen.
5. (Extra:) Teken een cirkel met straal 1 om het punt $(0, -1)$. Wind in gedachten de x-as om deze cirkel heen. Draai de curve van $1{,}5^x$ mee door bij de gehele getallen een staafje op de x-as te zetten en deze lengte vanop de cirkel uit te zetten als verlenging van de straal. (Omdat $2\pi \approx 6$ kan je gewoon de cirkel in zessen delen met je passer en deze stappen als stappen van 1 nemen.) De spiraal die ontstaat heet logaritmische spiraal of spiraal van Bernoulli. (Strikt genomen zou je dan nog alle staafjes naar het middelpunt van de cirkel moeten schuiven.)

Oefening 3 Kettingbreuken

Archimedes vond in de 3e eeuw voor Christus reeds de volgende afschatting van π:

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Het linkergetal is een zogenaamde *kettingbreuk*. Zonder rekenen kan je wel zien dat het kleiner is dan het rechtergetal (toch?), maar hoe groot is het precies?

1. Bereken dit getal. Schrijf het als breuk ($\frac{a}{b}$), en ook met helen apart ($a\frac{b}{c}$). Is het een goede benadering? Welke van de twee schattingen zit het dichtste bij π?

Chinese wiskundigen maakten reeds 200 jaar eerder gebruik van de benadering $3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16}}$.

2. Hoeveel is dit? Schrijf als breuk, met en zonder helen. In hoeveel decimalen nauwkeurig is deze benadering?

3. Hoe kan je aan de kettingbreukvorm (zonder rekenwerk) zien dat deze tussen de benaderingen van Archimedes zit?

4. Probeer eens of je zelf een kettingbreukvorm kan vinden voor $\frac{179}{57}$ en voor $\frac{80}{57}$.

Oplossingen

3. a) $\frac{223}{7} = 3\frac{10}{71} = 3{,}14084507\ldots$, dus tot 2 decimalen
   b) $\frac{355}{113} = 3\frac{16}{113} = 3{,}141\overline{592}$, dus tot 4 decimalen