Oplossingen

Voorkennis: Goniometrische verhoudingen

De officiële benaming voor de inverse van sinus, op je rekenmachine $\sin^{-1}$ is boogsinus, afgekort als arcsin, voor $\cos^{-1}$: boogcosinus = arccos, voor $\tan^{-1}$: boogtangens = arctan.

1. a) $\arctan(\frac{3}{5}) = 30{,}963756532$
   b) $\arcsin(\frac{8}{11}) = 46{,}658241773$
   c) $\arccos(\frac{4}{10}) = 66{,}421821522$
   d) $\arctan(\frac{7}{10}) = 34{,}992020199$
   e) $\arccos(\frac{7{,}5}{10}) = 41{,}409622109$

2. a) $17 \cdot \cos(38°) = 13{,}396182811$
   b) $5 \cdot \tan(55°) = 7{,}140740034$
   c) $7 \div \sin(40°) = 10{,}890066788$
   d) $17 \cdot \sin(60°) = 14{,}722431864$
   e) $3 \cdot \tan(75°) = 11{,}196152423$

3. $BD = AH = 4\sqrt{2}$, $BH = 4\sqrt{3}$
   a) $180° - 2 \cdot \arctan(\frac{EH}{HM}) = 53{,}130102354$
   b) $\arctan(\frac{4}{4\sqrt{2}}) = 35{,}264389683$ of $\arcsin(\frac{4}{4\sqrt{3}}) = 35{,}264389683$ of $\arccos(\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}) = 35{,}264389683$
   c) $180° - 2 \cdot \arctan(\frac{4\sqrt{2}}{2}) = 38{,}942441269$

   Het moge duidelijk zijn dat het niks uitmaakt dat de ribbe 4 is!

4. $AC = 4\sqrt{2}$, $AS = 2\sqrt{2}$, $NT = \sqrt{34}\ (= \sqrt{2}\sqrt{17})$, $ST = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
   a) $2 \cdot \arcsin(\frac{2\sqrt{2}}{6}) = 56{,}251011404$
   b) $\arctan(\frac{4}{2}) = 63{,}434948823$
   c) $\arccos(\frac{2}{NT}) = 69{,}940416551$
   d) $180° - \angle ACT - \angle CAT = 180° - 1{,}5 \cdot \angle ACT = 180° - 1{,}5 \cdot \arcsin(\frac{ST}{CT}) = 109{,}471220634$

Oplossingen

3.1 Oppervlakte van vlakke figuren

1. $5 \cdot 9 - \frac{2\cdot(9-4-1)}{2} = 41$

2. a) $\frac{8\cdot 6}{2} = 24$
   b) De helft van CD.
   c) $\frac{8\cdot 3}{2} = 12$
   d) Dus ook 12.

3. De hoogte van $\triangle ABN$ is $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ dus $O(ACN) = O(ABC) - O(ABN) = \frac{10\cdot 8}{2} - \frac{10\cdot 6}{2} = 10$

4. a) $10 \cdot 6 = 60$
   b) $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$
   c) $60 - 15 = 45$
   d) $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ of $O(ABP) = 20$ dus de hoogte is $\frac{20\cdot 2}{10} = 4$
   e) $\frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{20}{3} = 6{,}\overline{6}$

5. a) $\frac{2\cdot 3}{2} + \frac{\frac{3}{4}\cdot 3}{2} + \frac{\frac{11}{4}\cdot 1}{2} = 5{,}5$
   b) $\frac{5+1}{2} \cdot 3 = 9$
   c) $2 \cdot 3 + \frac{\pi}{2} = 7{,}570796327$

6. a) $\frac{\pi\cdot 5^2}{2} - 18 = 21{,}26990817$
   b) $MD = 5$ dus $DE = 4$: $\frac{\pi\cdot 5^2}{2} - 20 = 19{,}26990817$

7. a) Uit symmetrie volgt: $\frac{13-5}{2} = 4$
   b) $\frac{4+13}{2} \cdot 5 - \frac{4\cdot 3}{2} = 36{,}5$
   c) $13 \cdot 2 + \frac{13+5}{2} \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 73$
   d) $73 - 36{,}5 = 36{,}5$

8. a) Nee, want $O(DEFG) < O(ABCH)$ en $O(PQGD) < O(HCPQ)$
   b) $O(ABCDE) = \frac{9\cdot 9}{2} + \frac{5+2}{2} \cdot 4 = 54{,}5$, $O(AEFGH) = 73-54{,}5 = 18{,}5$, $O(ABCDE)/O(AEFGH) = 2{,}945945946$

9. $\pi \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 10{,}274333882$

10. a) $\frac{360°}{6}$
    b) Zij N het midden van AB. $MN = \frac{2}{\tan(30°)} = 2\sqrt{3} = 3{,}464101615$, $O(ABM) = \frac{3{,}464101615\cdot 4}{2} = 6{,}92820323$
    c) $6 \cdot 6{,}92820323 = 41{,}569219382$
    Direct: $6 \cdot \frac{4\cdot\frac{2}{\tan(30°)}}{2} = 24\sqrt{3}$

11. a) *
    b) $CD = 5 \cdot \sin(70°) = 4{,}698463104$, $O(ABC) = \frac{8\cdot 4{,}698463104}{2} = 18{,}793852416$

12. $\angle AMB = 72°$; $\angle MAB = 54°$; $AM = \frac{2{,}5}{\cos(54°)} = 4{,}253254042$; $O(ABCDE) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4{,}253254042 \cdot \sin(54°) = 86{,}023870029$

13. $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin(45°) = 101{,}823376491$

14. $AD = \frac{10}{\tan(70°)} = 3{,}639702343$; $BD = \frac{10}{\tan(40°)} = 11{,}917535926$; $O(ABC) = \frac{10\cdot(3{,}639702343+11{,}917535926)}{2} = 77{,}786191345$

15. a) $\frac{10\cdot 10\cdot\sin(80°)}{2} = 49{,}240387651$
    b) $\pi \cdot 10 \cdot \frac{80°}{360°} - 49{,}240387651 = 20{,}572782429$

16. $O(ABM) = 5\sqrt{3} = 8{,}660254038$; $O(MBC) = \frac{\pi 5^2}{6} = 13{,}08996939$; $O(ABCDEF) = 3 \cdot 5\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{\pi 5^2}{6} = 65{,}250670283$

3.2 Uitslagen

17. a, b, d
18. a, b, d
19. Een vierkant met zijden van 2 cm met aan elke zijde een driehoek met zijde 3 cm en dus hoogte $\sqrt{10} = 3{,}16227766$ cm
20. a) Gelijkvormigheid: $\frac{AT}{AE} = \frac{AB}{EF} \Rightarrow AT = \frac{4}{2} \cdot 3 = 6$
    b) Een vierkant van 4 bij 4 met aan elke zijde een trapezium met hoogte $\sqrt{10} = 3{,}16227766$ cm, met aan één trapezium nog een vierkant van 2 bij 2.
21. Drie vierkanten van 2 bij 2, 2 daarvan hebben een gelijkbenige, rechthoekige driehoek met korte zijde 2 en 1 van die twee heeft aan de lange zijde nog een gelijkzijdige driehoek met zijde $2\sqrt{2} = 2{,}828427125$ cm.
22. c, want de lengte van de strook moet de omtrek van de cirkel zijn.
23. a) De uitslag is een rechthoek met hoogte 2 cm en breedte $2 \cdot \pi \cdot \frac{3}{2} = 9{,}424777961$ cm
    b) De diagonaal van de rechthoek: $\sqrt{2^2 + 9{,}424777961^2} = 9{,}634647872$
24. a) Een rechthoek van 5 bij $2 \cdot \pi \cdot 2 = 12{,}566370614$ cm, met twee rechte lijnen van linksonder naar het rechts in het midden en van links in het midden naar rechtsboven.
    b) $2 \cdot \sqrt{5^2 + 12{,}566370614^2} = 27{,}049116098$ cm
25. $4 \cdot \sqrt{9^2 + (2 \cdot \pi \cdot 500)^2} = 12566{,}422180455 \approx 12.566{,}4$ cm
26. c: de lengte van de cirkelboog moet gelijk zijn aan de omtrek van de cirkel.
27. a) $\frac{\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 3}{2\pi} = \frac{3}{4} = 0{,}75$
    b) $\frac{210}{360} \cdot 2{,}5 = \frac{35}{24} = 1{,}458\overline{3}$
    c) $\frac{300}{360} \cdot 2 = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$
28. $r = \frac{pR}{360}$
29. $\alpha = \frac{3}{5} \cdot 360° = 216°$
30. a) Een cirkel met straal 3 tegen een cirkelsector met straal 5 en hoek $\frac{3}{5} \cdot 360° = 216°$.
    b) Een cirkel met straal 4 tegen een cirkelsector met straal 5 en hoek $\frac{4}{5} \cdot 360° = 288°$.

3.3 Oppervlakte van ruimtefiguren

31. a) $2\pi \cdot 2 \cdot 3 = 12\pi = 37{,}699111843$
    b) $12\pi + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 20\pi = 62{,}831853072$

32. $2\pi(3^2+3\cdot4) = 42\pi = 131{,}946891451$

33. $175\cdot((12-2\cdot3)\cdot6+\pi\cdot3\cdot6) = 16196$ €

34. $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 12 \cdot 20 = 753{,}982236862$

35. $2\pi(4^2 + 4 \cdot 10) = 2\pi(2^2 + 2h)$, waaruit $h = 26$

36. a) $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\alpha = 360\frac{r}{R} = 216°$
    b) $\frac{3}{5}\pi \cdot 5^2 = 15\pi = 47{,}123889804$
    c) $47{,}123889804 + \pi \cdot 3^2 = 24\pi = 75{,}398223686$

37. a) volgt uit uitslag
    b) $\frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \alpha = \frac{r}{R} \cdot 360°$
    c) $\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \pi R^2 \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{360}{360} = \pi r R$
    d) $\pi r R + \pi r^2 = \pi r(r + R)$

38. $R = \frac{7}{\cos(22{,}5°)} = 7{,}576745402$; $O = \pi \cdot 7(7 + \frac{7}{\cos(22{,}5°)}) = 320{,}559373878$

39. a) $\pi r^2 = 100 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{100}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt{\pi}} = 5{,}641895835$
    b) $R = \sqrt{10^2 + \frac{100}{\pi}} = 10\sqrt{\frac{\pi+1}{\pi}} = 11{,}481767661$; $O = \pi\sqrt{\frac{100}{\pi}} \cdot 10\sqrt{\frac{\pi+1}{\pi}} = 100\sqrt{\pi + 1} = 203{,}509033057$

40. a) $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} = 3{,}989422804$
    b) $\pi r R = 75 \Rightarrow R = \frac{75}{\pi r} = \frac{75}{\sqrt{50\pi}} = 5{,}984134206$
    c) $\alpha = \frac{r}{R} \cdot 360° = \frac{50}{75} \cdot 360° = \frac{2}{3} \cdot 360° = 240°$

41. $\frac{30}{45} \cdot 360° = 240°$

42. a) Bij gelijkvormigheid moet er een vergrotingsfactor zijn. Deze bereken je uit de bekende waarden 2 en 7: $\frac{AB}{DE} = \frac{7}{2}$. De andere zijden worden volgens dezelfde factor vergroot, staan dus in dezelfde verhouding.
    b) $AB \cdot DC = DE \cdot AC$
    c) Oplossen naar x geeft $CD = 4$, Pythagoras geeft $BC = 15{,}652475842$

43. a) $5x = 2x + 12 \Rightarrow x = 4$
    b) $R_1 = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11{,}180339887$; $O = \pi r_1 R_1 = 175{,}620368276$
    c) $R_2 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}472135955$; $O = 203{,}7196272$
    d) $203{,}7196272 + \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 5^2 = 294{,}825814154$

44. Noem x de hoogte van het stuk kegel dat nog boven de lamp past. $x = \frac{22}{3} = 7{,}\overline{3}$; $r_1 = 4$; $r_2 = 10$; $R_1 = 8{,}353309391$; $R_2 = 20{,}883273477$; $O = \pi(r_1 R_1 - r_2 R_2) = 551{,}096603719$

45. a) $\angle ACB = 180° - 90° - \angle DCE = 90° - (90° - \angle DEC) = \angle DEC$
    b) 2 gelijke hoeken ($A - D$ en $C - E$)
    c) $CE = 10 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{4} = 3{,}75$

46. a) De stippellijn is het gemiddelde van de breedte en bij allebei even lang. De oppervlakte van de ring kan je dus benaderen met $2\pi as$. De oppervlakte van de cilinder is

$2\pi ah$, deze vergelijken geeft $O_{\text{ring}} = \frac{s}{h} \cdot O_{\text{cilinder}}$

b) allebei gelijk aan de vergrotingsfactor

c) $O = 2\pi as = 2\pi rh$

47. $2 \cdot 4\pi r^2 = 4\pi 5^2 \Rightarrow r = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3{,}535533906$

48. $2\pi \cdot 7{,}5^2 + 2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 5 + \pi \cdot 7{,}5^2 = \frac{975}{4}\pi = 765{,}763209313$

49. $r = \frac{40000}{2\pi} = 6366{,}197723676$ km; $0{,}71 \cdot 4\pi \cdot r^2 = 361600030{,}704786203$ km²

50. $4\pi r^2 = 2\pi r \cdot 2r$

51. a) $R = 5$; $4\pi r_b^2 = \pi r_k R_k \Rightarrow r_b = \sqrt{\frac{r_k R_k}{4}} = \frac{\sqrt{1{,}5}}{2} = 0{,}612372436$

b) $4\pi r_b^2 = \pi r_k(R_k + r_k) \Rightarrow r_b = \frac{\sqrt{r_k(R_k+r_r)}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6} = 2{,}449489743$

3.4 Inhoud van ruimtefiguren

52. a) $\frac{\pi r^2 h}{3}$
    b) $\frac{4}{3}\pi r^3$

53. $I_{\text{cilinder}} = \pi r^2 \cdot 6r = 6\pi r^3$; $I_{\text{ballen}} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$, de verhouding is dus $\frac{2}{3} = 66{,}\overline{6}\%$

54. a) $G = 6 \cdot \sqrt{6^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 18\sqrt{3} = 31{,}176914536$; $I = Gh = 18\sqrt{3} \cdot 8 = 249{,}41531629$
    b) $G = 10 \cdot \sqrt{13^2 - 10^2} = 83{,}066238629$; $I = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{69} \cdot 9 = 30\sqrt{69} = 747{,}596147663$
    c) $r = 2$; $h = \sqrt{6}$; $I = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{6} = 10{,}260398641$

55. a) Pythagoras op bijvoorbeeld het meest rechtse driehoekje.
    b) $G = 3{,}5$; $I = \frac{1}{3} \cdot 3{,}5 \cdot \sqrt{3} = 2{,}020725942$

56. Hoofdgebouw: $(6 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 6}{2}) \cdot 14 = 420$, uitsteeksel: $(4 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 4}{2}) \cdot 5 = 100$, stuk dak boven hoofdgebouw, verbinding met uitsteeksel: $\frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 3 = 8$, samen 528

57. Verdeel de piramide in stukken, bij benadering zo uit te drukken: $T.ABCD - EHIJK - FGHKL - HKB$, waarbij de tweede en derde een liggende balk met driehoekig grondvlak zijn, en de derde een schuine piramide met vierkant grondvlak: $\frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 = 884$ m²

58. Meten levert een zijde van 1,3 cm en een hoogte van 3,4 cm. Het grondvlak bestaat uit twee trapezia: $5 \cdot 2 \cdot \frac{1{,}3+2{,}6}{2} \cdot 3{,}4 = 66{,}3$

59. $I_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3$; $I_{\text{kegel}} = \frac{1}{3}\pi r_k^2 \cdot 10$; $I_{\text{cilinder}} = \pi r_c^2 \cdot 10$. Gelijkstellen levert $r_k = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi 5^3}{10} \cdot 3} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7{,}071067812$ en $r_c = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi 5^3}{10}} = \sqrt{\frac{50}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4{,}082482905$

60. $I_k : I_b = \frac{1}{2}$; $I_k : I_c = \frac{1}{3}$; $I_b : I_c = \frac{2}{3}$

61. a) $15 \cdot 15 \cdot 200 + \pi \cdot 7{,}5^2 \cdot (200 - 15) = 77692{,}198551419$ cm³
    b) $\pi r^2 h = 77692$ met $r = 7{,}5$, waaruit $h = \frac{77692}{\pi \cdot 7{,}5^2} = 439{,}647908947$ cm

62. a) De bovenste rechthoek is gelijkvormig aan de onderste, dus er is sprake van een vergroting, de top van de piramide is het centrum van de vergroting. De vergrotingsfactor is $\frac{1}{2}$.
    b) Noem x de afstand van de bodem tot de denkbeeldige spits van de piramide, dan geldt $\frac{2+x}{2} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = 2$; $I = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 8$ m³

63. Noem x de hoogte van de hele kegel, dan geldt $\frac{x}{25} = \frac{30}{20} \Rightarrow x = 37{,}5$; $I = \pi \cdot 15^2 \cdot 37{,}5 - \pi \cdot 10^2 \cdot 12{,}5 = 22580$ cm³, dus 22,6 l. (1 l = 1 dm³ = 1000 cm³)

Het is geenszings uitgesloten dat hier reken- en typfouten in zitten. Graag melden.