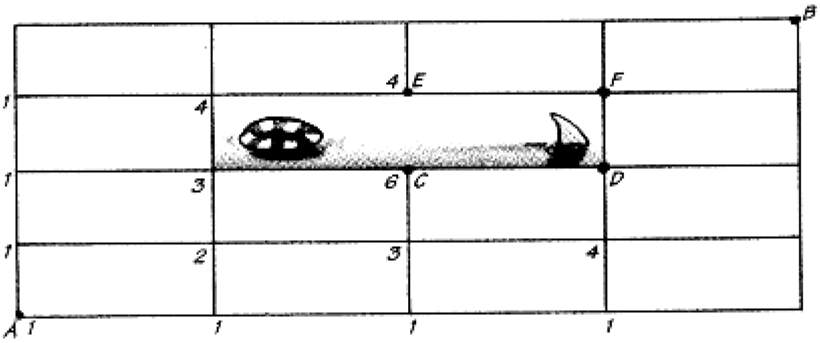
Groepsopdracht 1: Volledige en onvolledige roosters

Voor een volledig rooster kun je de driehoek van Pascal gebruiken om te weten te komen hoeveel routes er van A naar B zijn. Bij onvolledige roosters werkt dat niet.

Opgave 1. Hoeveel routes van linksboven naar rechtsonder zijn er in een volledig rooster van 3 bij 4?

Opgave 2. In het onderstaande rooster is er geen weg van C naar E. Je noemt zo'n rooster een onvolledig rooster. In zo'n rooster kun je de driehoek van Pascal niet gebruiken om het aantal routes van A naar B te berekenen. Je kunt dit aantal te weten komen door bij elk kruispunt te vermelden op hoeveel manieren je er vanuit A kunt komen. Werk daarbij vanuit A naar B toe. In de figuur is hiermee al een begin gemaakt.



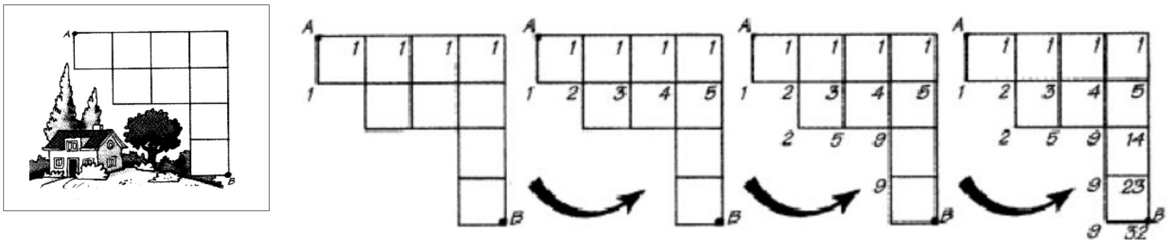
a. Licht het getal 6 bij het punt C toe. Bedenk dat 6 precies 3 + 3 is.

b. Om bij D uit te komen moet je of uit het punt eronder of vanuit het punt links van D zijn gekomen. Welk getal moet er dus bij D komen te staan?

c. Hoe ontstaat het getal bij F uit de getallen bij D en E?

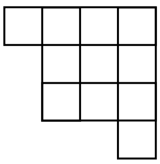
d. Vul de resterende getallen in. Hoeveel routes zijn er van A naar B?

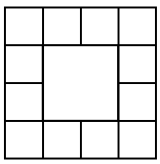
Theorie: Bij een onvolledig rooster als hieronder met het huisje kun je het aantal routes van A naar B te weten komen door bij elk hoekpunt het aantal routes naar dat punt te zetten. Dat doe je door de juiste getallen bij elkaar op te tellen.



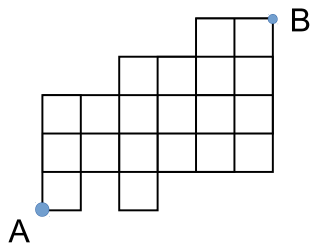
Hieronder zie je hoe dat gaat.

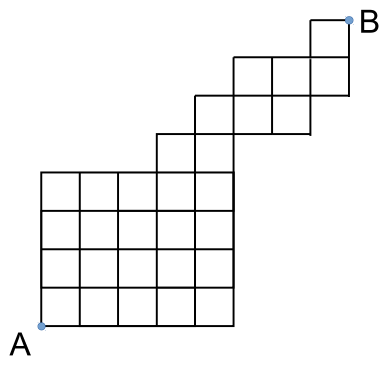
Opgave 3. Tel het aantal routes in de volgende onvolledige roosters van linksboven naar rechtsonder.





Opgave 4. Bereken het aantal kortste routes van A naar B in de onderstaande roosters.





Presentatie: Leg de laatste opgave uit aan de klas. Bedenk dat de andere leerlingen nog niet weten hoe ze dat moeten aanpakken!

Groepsopdracht 2: Combinaties

Voorbeeld: Op een school bestaat de feestcommissie uit 6 jongens en 9 meisjes. Na elk feest maken zes leden van de feestcommissie de zaal schoon.

a. Hoeveel schoonmaakploegen bestaan uit 2 jongens en 4 meisjes?

b. Hoeveel schoonmaakploegen bestaan uit 2 jongens en 4 meisjes of 3 jongens en 3 meisjes?

Oplossing:

a. De volgorde is niet van belang, dus combinaties. De vraag is: op hoeveel manieren kun je 2 jongens kiezen uit 6 jongens én op hoeveel manieren kun je 4 meisjes kiezen uit 9 meisjes. Omdat er 'en' staat moet je vermenigvuldigen, dus:

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{4}$$

b. Bij deze vraag bepaal je eerst op dezelfde manier als bij a hoeveel manieren er zijn om 2 jongens en 4 meisjes te kiezen, en hoeveel manieren er zijn om 3 jongens en 3 meisjes te kiezen. Omdat er 'of' staat moet je optellen, dus:

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{4}+\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{3}$$

Opgave 1. Een klas bestaat uit 18 meisjes en 11 jongens. Tijdens een werkweek wijst de mentor voor elke maaltijd een corveeploeg aan van 4 personen.

a. Hoeveel corveeploegen zijn mogelijk?

b. Hoeveel corveeploegen zonder jongens zijn mogelijk?

c. Hoeveel corveeploegen zijn er mogelijk met 2 jongens en 2 meisjes?

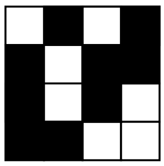
Opgave 2. Je gooit elk van de 8 verschillende euromuntstukken. Een mogelijke uitkomst is KKMKMMMK. Bij deze uitkomst heb je 4 keer kop gegooid.

a. Hoeveel uitkomsten zijn er in totaal mogelijk?

b. Hoeveel uitkomsten zijn er met precies 5 keer kop?

c. Hoeveel uitkomsten zijn er met precies 4 keer kop?

Opgave 3. Een bedrijf gebruikt codes waarbij in een 4x4-rooster een aantal hokjes al dan niet zwart wordt gemaakt.



a. Hoeveel codes zijn er in totaal?

b. Hoeveel codes zijn er met 8 zwarte blokjes?

c. Hoeveel codes zijn er met 13 of meer zwarte blokjes?

Opgave 4. Een meerkeuzetoets bestaat uit 25 vragen. Elk antwoord is A, B, C of D.

d. Hoeveel volgordes bestaan er waarop deze vragen kunnen worden gerangschikt?

e. Hoeveel verschillende antwoordenreeksen kun je maken?

f. Hoeveel antwoordenreeksen bestaan er met 15 goede antwoorden? Hint: Bereken eerst het aantal manieren waarop je 15 goede antwoorden kunt geven bij 25 vragen als je alleen let op het goed of fout zijn van een vraag. Bij elk fout antwoord waren er 3 mogelijke antwoorden (één keuze is goed, drie zijn er fout). Bereken het aantal manier waarop je 10 foute antwoorden kan geven. [wiskunde B]

g. Hoeveel antwoordenreeksen zijn er met 3 A's, 5 B's, 15 C's en 2 D's? [wiskunde B]

Presentatie: Behandel de opgave 3. Omdat het voor de rest van de leerlingen best lastig zal zijn: probeer het rustig aan te doen.

Groepsopdracht 3: Combinaties

Voorbeeld: Op een school bestaat de feestcommissie uit 6 jongens en 9 meisjes. Na elk feest maken zes leden van de feestcommissie de zaal schoon.

a. Hoeveel schoonmaakploegen bestaan uit 2 jongens en 4 meisjes?

b. Hoeveel schoonmaakploegen bestaan uit 2 jongens en 4 meisjes of 3 jongens en 3 meisjes?

Oplossing:

a. De volgorde is niet van belang, dus combinaties. De vraag is: op hoeveel manieren kun je 2 jongens kiezen uit 6 jongens én op hoeveel manieren kun je 4 meisjes kiezen uit 9 meisjes. Omdat er 'en' staat moet je vermenigvuldigen, dus:

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{4}$$

b. Bij deze vraag bepaal je eerst op dezelfde manier als bij a hoeveel manieren er zijn om 2 jongens en 4 meisjes te kiezen, en hoeveel manieren er zijn om 3 jongens en 3 meisjes te kiezen. Omdat er 'of' staat moet je optellen, dus:

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{4} + \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{3}$$

Opgave 1. Een klas bestaat uit 18 meisjes en 11 jongens. Tijdens een werkweek wijst de mentor voor elke maaltijd een corveeploeg aan van 4 personen.

a. Hoeveel corveeploegen zijn mogelijk?

b. Hoeveel corveeploegen zonder jongens zijn mogelijk?

c. Hoeveel corveeploegen zijn er mogelijk met 2 jongens en 2 meisjes?

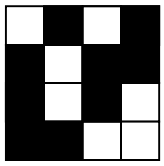
Opgave 2. Je gooit elk van de 8 verschillende euromuntstukken. Een mogelijke uitkomst is KKMKMMMK. Bij deze uitkomst heb je 4 keer kop gegooid.

a. Hoeveel uitkomsten zijn er in totaal mogelijk?

b. Hoeveel uitkomsten zijn er met precies 5 keer kop?

c. Hoeveel uitkomsten zijn er met precies 4 keer kop?

Opgave 3. Een bedrijf gebruikt codes waarbij in een 4 x 4 rooster een aantal hokjes al dan niet zwart wordt gemaakt.



a. Hoeveel codes zijn er in totaal?

b. Hoeveel codes zijn er met 8 zwarte blokjes?

c. Hoeveel codes zijn er met 13 of meer zwarte blokjes?

Opgave 4. Een meerkeuzetoets bestaat uit 25 vragen. Elk antwoord is A, B, C of D.

a. Hoeveel volgordes bestaan er waarop deze vragen kunnen worden gerangschikt?

b. Hoeveel verschillende antwoordenreeksen kun je maken?

c. Hoeveel antwoordenreeksen bestaan er met 15 goede antwoorden? Hint: Bereken eerst het aantal manieren waarop je 15 goede antwoorden kunt geven bij 25 vragen als je alleen let op het goed of fout zijn van een vraag. Bij elk fout antwoord waren er 3 mogelijke antwoorden (één keuze is goed, drie zijn er fout). Bereken het aantal manier waarop je 10 foute antwoorden kan geven. [wiskunde B]

d. Hoeveel antwoordenreeksen zijn er met 3 A's, 5 B's, 15 C's en 2 D's? [wiskunde B]

Presentatie: Behandel opgave 2 en 4 (zeker a, b, d). Omdat het voor de rest van de leerlingen best lastig zal zijn: probeer het rustig aan te doen.

Groepsopdracht 4: Permutatie of combinatie

Bepaal bij elk van de volgende voorbeelden of het om een permutatie of een combinatie gaat en geef het aantal manieren.

Opgave 1. Een bedrijf gebruikt de 26 letters uit het alfabet om codes van drie letters te maken. Elke letter mag maar 1 keer worden gebruikt.

Opgave 2. In een klas zitten 18 meisjes en 10 jongens. Over deze klas gaan de volgende 3 vragen.

a. Je kiest een feestcommissie met 3 leerlingen uit de klas.

b. Je kiest een feestcommissie met 4 jongens.

c. Je kiest voor een feestcommissie een voorzitter, een secretaris en een penningmeester.

Opgave 3. Manon kiest drie cd's uit een collectie van 25 cd's.

Opgave 4. Voor een schaakvereniging worden uit de 18 leden er 4 gekozen om achter bord I, II, III en IV te spelen. Het maakt uit achter welk bord ze terechtkomen.

Opgave 5. In een kast staan 8 Franse boeken. Je zet deze boeken op een volgorde.

Opgave 6. In een klas met 28 leerlingen worden 2 leerlingen voor de klassenwacht aangewezen.

Opgave 7. Hoeveel manieren zijn er om deze 9 vragen op een rij te zetten?

Opgave 8. Je gooit elk van de 8 verschillende euromuntstukken. Een mogelijke uitkomst is KKMKMMMK. Bij deze uitkomst heb je 4 keer kop gegooid.

a) Hoeveel uitkomsten zijn er in totaal mogelijk?

b) Hoeveel uitkomsten zijn er met precies 5 keer kop?

c) Hoeveel uitkomsten zijn er met precies 4 keer kop?

d) (extra) Kan je dit in verband brengen met de som van de getallen in een rij van de driehoek van Pascal?

Opgave 9. Reken na dat $\binom{10}{6}=\binom{10}{4}$. Probeer onder het motto 'een glas dat half leeg is, is ook half vol' een telprobleem als 'Er staan acht stoelen op een rij. Vijf mensen gaan op die stoelen zitten. Op hoeveel manieren kunnen die vijf mensen gaan zitten?' om deze gelijkheid toe te lichten. [wiskunde B]

Presentatie: Je legt uit wat het verschil is tussen een permutatie en een combinatie. Bedenk zelf een paar opgaven waaruit het verschil tussen een permutatie en combinatie duidelijk wordt.

Groepsopdracht 5: Bakjesmodel

Ter inleiding van een nieuw type telproblemen moet je eerst een paar opgaven oplossen.

Opgave 1. Op een moederbord heb je 5 contacten, op elk contact kun je een snoer aansluiten. Op hoeveel verschillende manieren kun je 3 verschillend gekleurde draden aansluiten?

Opgave 2. Hoeveel ‘rangschikkingen’ (volgordes) kun je maken met de letters WISKUNDE?

Bestudeer nu eens het volgende voorbeeld:

Voorbeeld: Hoeveel rangschikkingen kan je maken met de letters WISWIJZER?

Uitwerking: Stel je voor dat je 9 knikkers met de 9 letters van WISWIJZER hebt. 9 knikkers kun je op 9! manieren rangschikken (op een volgorde leggen). Nu zijn er twee knikkers met een W en twee knikkers met een I erop. Die tel je telkens dubbel! De twee W’s kun je namelijk verwisselen zonder dat de boel verandert. Hetzelfde geldt voor de I.

Er zijn dus $\frac{9!}{2!\,2!} = 90.720$ mogelijkheden.

Opgave 3. Leg uit dat je $\frac{8!}{3!\,2!\,2!}$ rangschikkingen kunt maken met de letters COCA COLA?

Opgave 4. Hoeveel rangschikkingen kun je maken met de letters KANSBEREKENING?

Opgave 5. Hoeveel rangschikkingen kun je maken met de letters ZEEEGEL?

Presentatie: Maak zelf een opgave zoals in opgave 3, 4 en 5. Leg uit hoe je die oplost! Geef niet alleen het antwoord, maar leg ook uit hoe je er aan komt. De andere leerlingen weten immers niet hoe ze dat moeten aanpakken!

Groepsopdracht 6: Binomium van Newton

Er is een verband tussen de driehoek van Pascal en het uitwerken van de haakjes in bijvoorbeeld $(a+b)^5$. We gaan dit verband in deze opdracht onderzoeken.

Opgave 1. Bereken $(a+b)^2$. Schrijf je antwoord in de vorm $\ldots a^2 + \ldots ab + \ldots b^2$

Opgave 2. Bereken $(a+b)^3$. Schrijf je antwoord in de vorm

$\ldots a^3 + \ldots a^2 b + \ldots ab^2 + \ldots b^3$

Opgave 3. Bereken $(a+b)^4$. Schrijf je antwoord in de vorm

$\ldots a^4 + \ldots a^3 b + \ldots a^2 b^2 + \ldots ab^3 + \ldots b^4$

Opgave 4. Vergelijk de getallen die je op de puntjes moet invullen bij de voorgaande opgaven met de rijen uit de driehoek van Pascal. Probeer of je een vermoeden kunt ontwikkelen voor de uitkomst van $(a+b)^5$.

Als het goed is heb je in Opgave 4. het Binomium van Newton ontdekt. Dit luidt:

$$(a+b)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} b + \ldots + c_{n-1} a\, b^{n-1} + c_n b^n$$

waarbij c_0 , c_1 , ..., c_{n-1} en c_n de getallen uit de n-de rij van de driehoek van Pascal zijn.

Opgave 5. Bereken $(a+b)^{10}$, dus werk de haakjes weg.

Opgave 6. Werk de haakjes weg bij $(x+2)^{12}$.

Presentatie: Leg uit hoe je de driehoek van Pascal kunt gebruiken om bij een uitdrukking als $(x+2)^5$ de haakjes weg te werken.

Erg moeilijk alternatief: Bewijs dat het binomium van Newton geldt door het uitwerken van de haakjes te "vertalen" in een telprobleem.

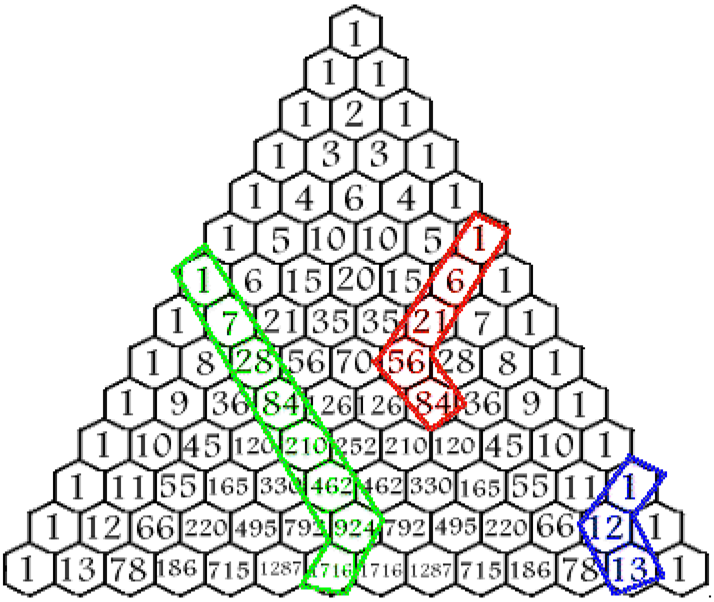
Groepsopdracht 7: De driehoek van Pascal

Opgave 1. De bovenste rij van de driehoek wordt de 0e rij genoemd. De rij daaronder de 1e rij, de rij daaronder de 2e rij enzovoort. Tel telkens de getallen van de 0e, 1e, 2e, …, 8e rij bij elkaar op. Probeer nu eens of je kunt voorspellen tot welk getal de getallen in de 9e rij optellen. Controleer of je antwoord klopt!

Opgave 2. Bereken: $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}$. Vergelijk je uitkomsten met de getallen uit de 5e rij van de driehoek van Pascal.

Opgave 3. Het 1e getal uit een rij wordt het 0e getal uit die rij genoemd. Daarna tel je gewoon door. Het 4e getal uit de 7e rij is dus 35 (lees af). Reken na dat ook $\binom{7}{3} = 35$.

Opgave 4. Hieronder zie je het 'hockeystickprincipe' geïllustreerd. Tel eens op $1+6+21+56=\ldots$ en $1+7+28+84+210+462+924=\ldots$. Wat valt je op? Probeer eens te verwoorden wat het hockeystickprincipe inhoudt. Teken ook eens een zogenaamde hockeystick en controleer of jouw uitleg ook klopt.



Opgave 5. Teken de driehoek van Pascal en leg uit wat deze driehoek met combinaties te maken heeft. Wat weet je van de som van de termen in elke rij van de driehoek van Pascal?

Presentatie: Leg het hockeystickprincipe uit aan de klas en leg uit wat de driehoek van Pascal met combinaties te maken heeft; leg een verband met routes in een rooster.