De som- en verschilformules

1. Eerst nog even de basisrelaties tussen sin, cos en tan ophalen. We werken in radialen.

   a) Schets een rechthoekige driehoek, noem 1 hoek α. Wat is de andere hoek (in radialen)?

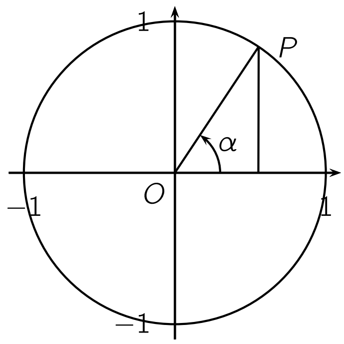
   b) Er geldt:

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \tag{1}$$

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right). \tag{2}$$

   Toon dit aan.

   c) Ga dit na door beide grafieken te plotten met de GR.



   d) Punt P heeft als coördinaten $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Ga na.

   e) Teken in de cirkel de punten $Q(\cos(-\alpha), \sin\alpha)$, $R(\cos(\alpha+\pi), \sin(\alpha+\pi))$ en $S(\cos(\pi-\alpha), \sin(\pi-\alpha))$.

   f) P en Q liggen symmetrisch t.o.v. de x-as, dus:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \tag{3}$$

$$\cos(-\alpha) = -\cos\alpha \tag{4}$$

   Leid net zo af:

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \tag{5}$$

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha \tag{6}$$

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \tag{7}$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \tag{8}$$

g) Gebruik de eenheidscirkel om ook de volgende formules op gelijkaardige manier te verifiëren.

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right) = -\sin\alpha \tag{9}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right) = \cos\alpha. \tag{10}$$

h) Kies een waarde voor α en bereken $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2$. Verklaar het resultaat.
Tip: gebruik Pythagoras.

In plaats van $(\cos\alpha)^2$ wordt gewoonlijk $\cos^2\alpha$ geschreven. (Waarom niet $\cos\alpha^2$?)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{11}$$

2. Hier zijn nog eens de som- en verschilformules voor de sinus en cosinus:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{12}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{13}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{14}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{15}$$

a) Vul in de somformules $\beta = \alpha$ in om de verdubbelingsformules te krijgen. Werk zo ver mogelijk uit.

b) Voor $\cos(2\alpha)$ zijn nog twee interessante vormen te vinden, met behulp van formule 11. Zoek deze.

3. Laat met behulp van de formules zien dat de functies $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ en $g(x) = 1 + \sin 2x$ hetzelfde zijn.

4. Uit de somformules vallen de formules van Mollweide af te leiden.

a) Stel $a = t + u$ en $b = t - u$. Ga na dat dan volgt $t = \frac{1}{2}(a+b)$ en $u = \frac{1}{2}(a-b)$.

b) Combineer formules 12 en 13 om de eerste van de volgende formules af te leiden:

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(a-b)\right) \tag{16}$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) \tag{17}$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(a-b)\right) \tag{18}$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}(a-b)\right) \tag{19}$$

c) Herhaal voor de andere 3 formules.